Решение текстовых задач на уроках математики.

При изучении объектов реального мира, явлений природы чаще всего изучают не сами объекты и явления, а замещают их некоторыми моделями. Изучая модель, делают выводы о самом объекте или явлении.

Существуют два вида моделей: материальные, то есть те, на которые можно посмотреть, потрогать их и т.д. и мысленные. Когда учитель физики приносит в класс модель двигателя внутреннего сгорания или другую модель, и, пользуясь ей, рассказывает об устройстве настоящего двигателя, установленного на автомобилях и других машинах, то он имеет дело с реальными моделями. Точно так же на материальных моделях проводится обучение химии, биологии и другим естественным дисциплинам.

В математике все обстоит иначе – здесь имеют дело так называемыми мысленными моделями, которые нельзя обнаружить с помощью органов чувств. Эти мысленные модели называются математическими моделями, в которых реальные объекты заменены математическими символами и операциями над ними.

При математическом моделировании проходят условно следующие этапы:

I этап – ознакомление и изучение реальной ситуации или описание этой ситуации, то есть изучение условия текстовой задачи.

II этап – перевод содержания задачи на язык математических терминов, построение математической модели. При этом получается уравнение система уравнений или неравенств другие абстрактные математические объекты.

III этап – решение задачи внутри математической модели, решение полученного уравнения системы уравнений или неравенств и т.д.

IV этап – перенос полученных результатов на подлинный объект изучения. При этом соотносят полученные результаты с условием задачи, отбрасывают посторонние решения, то есть происходит соотнесение полученных решений с реальностью, описанной соответствующим условием задачи.

Рассмотрим следующие задачи:

Задача 1.

Курьер проехал путь длиной 20 км, чтобы доставить посылку, со средней скоростью x км/ч.

a) Выразите количество часов через x, которые он потратил на путь (в часах)

b) На обратном пути к офису по тому же маршруту его скорость была на 15 км/ч меньше, чем его прежняя скорость. Выразите время, которое он потратил на обратный путь (в часах)

c) На обратный путь он потратил на 4 минуты больше времени. Покажите, что задача может быть выражена следующим уравнением

$$\frac{20}{x-15}-\frac{20}{x}=\frac{1}{15}$$

d) i) Покажите, что данное уравнение $\frac{20}{x-15}-\frac{20}{x}=\frac{1}{15}$ можно представить в виде $x^2-15x-4500=0$

ii) Решите уравнение $x^2-15x-4500=0$. Найдите среднюю скорость, с которой курьер доставил посылку из офиса.

Решение.

a) Средняя скорость $=\frac{\text{Весь путь}}{\text{Затраченное время}}$;

Время, затраченное для доставки посылки $=\frac{\text{Путь на доставку}}{\text{Средняя скорость доставки}}=\frac{20}{x}$ (ч)

b) Средняя скорость $=\frac{\text{Весь путь}}{\text{Затраченное время}}$;

Время, затраченное на обратный путь $=\frac{\text{обратный путь к офису}}{\text{Средняя скорость на обратном пути}}=\frac{20}{x-15}$ (ч)

c) 4мин $=\frac{4}{60}$ ч $=\frac{1}{15}$ ч

Так как обратный путь занял на 4 минуты или $\frac{1}{15}$ч больше, чем путь на доставку, то: время, затраченное на обратный путь = $\frac{1}{15}$ч

$\frac{20}{x-15}-\frac{20}{x}=\frac{1}{15}$ (показано)

d) (i) $\frac{20}{x-15}-\frac{20}{x}=\frac{1}{15}$; $\frac{20x-20(x-15)}{x(x-15)}=\frac{1}{15}$; $\frac{300}{x(x-15)}=\frac{1}{15}$;

$4500=x(x-15)$, $x^2-15x-4500=0$ (показано)

(ii) $x^2-15x-4500=0$, $(x-75)(x+60)=0$, $x=75$ или $x=-60$.

Так как средняя скорость не может быть отрицательной, x=-60 не удовлетворяет условию задачи.

Средняя скорость курьера 75км/ч.

Ответ: 75 км/ч.

Рассмотрим несколько задач, которые решаются с помощью квадратных уравнений.

Задача 2. Бак наполняется из двух кранов ***A*** и ***B***.

(a) Учитывая, что кран ***A*** работая один может заполнить бак за *t* минут, выразите через *t*, какую часть бака может заполнить кран ***A*** в течение 1 минуты.

(b) Учитывая, что кран ***B*** заполняет бак на 18 минут дольше чем кран ***A***, выразите через *t*, какую часть бака может заполнить кран ***B*** в течении 1 минуты.

(c) Когда работают оба крана, то бак заполняется водой всего за 23 минуты. Составьте уравнение, зависящее от *t*, и покажите, что оно сводится к уравнению $x^2-28x-414=0$.

(d) Решите уравнение $x^2-28x-414=0$, округлив свой ответ с точностью до 3 значащих цифр. Найдите время необходимое для заполнения емкости краном ***A***, если он работает один.

Решение.

(a) за *t* минут кран ***A*** может заполнить полностью бак.

За 1 минуту кран ***A*** может заполнить $\frac{1}{t}$ часть бака.

(b) за *(t+18)* минуты кран ***B*** может заполнить полностью бак.

За 1 минуту кран ***B*** может заполнить $\frac{1}{t+18}$ часть бака.

(c) за 23 минуты краны ***A*** и ***B*** могут заполнить полностью бак.

За 1 минуту краны ***A*** и ***B*** могут заполнить $\frac{1}{23}$ часть бака.

Мы получаем уравнение: $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+18}=\frac{1}{23}$; $\frac{(t+18)+t}{t(t+18)}=\frac{1}{23}$

$23(2t+18)=t^2+18t$; $t^2-28t-414=0$

$$t=\frac{-(-28)\pm\sqrt{(-28)^2-4(-414)}}{2}=\frac{28\pm\sqrt{2440}}{2}=38.7$$

или -10,7 (с точностью до 3 значащих цифр)

Так как время не может быть отрицательным, то *t* =-10,7 отбрасываем.

Ответ: Время необходимое для заполнения емкости краном ***A*** равно 38,7 минуты.

Задача 3. Биолог решил купить в рабочий кабинет несколько горшков комнатных растений.

(a) Учитывая, что он мог бы купить *x* горшков растений за 1 200 тг, выразите через *x* стоимость одного горшка.

(b) В связи с массовыми закупками, введена скидка 20 тг на каждый горшок. С дисконтом, за то же самое количество денег, биолог мог бы купить на 2 горшка растений больше.

(i) Выразите через *x* стоимость одного горшка после скидки.

(ii) Покажите, что эта задача может быть представлена уравнением $\frac{1200}{x}-\frac{1200}{x+2}=20$

(c) (i) Покажите, что уравнение $\frac{1200}{x}-\frac{1200}{x+2}=20$ сводится к уравнению $x^2+2x-120=0$.

(ii) Решите уравнение $x^2+2x-120=0$. Укажите количество купленных горшков растений.

Задача 4. Даны два прямоугольника ***A*** и ***B***, площадь каждого из которых равна 11 см^2. Длина прямоугольник ***A*** равна *x* см. Длина прямоугольника ***B*** равна *(x+3)* см.

(a) Выразите через *x*

(i) ширину прямоугольника ***A***,

(ii) ширину прямоугольника ***B***.

(b) Учитывая, что ширина прямоугольника ***A*** на 2 см больше, чем ширина прямоугольника ***B***, составьте уравнение, зависящее от *x* и покажите, что оно упрощается до вида $2x^2+6x-33=0$.

(c) Решите уравнение $2x^2+6x-33=0$, дайте оба ответа с точностью до 2 знаков после запятой.

(d) Найти ширину прямоугольника ***B***.

Задача 5. Дарья и Айдар собирают калькуляторы.

a) В среднем Дарья собирает 1 калькулятор за x минут. Выразите через x количество калькуляторов, которые она соберет за один час.

b) В среднем Айдару нужно на 1 минуту меньше, чем Дарье для того, чтобы собрать калькулятор. Выразите через x количество калькуляторов, которые он соберет за один час.

c) Учитывая, что Дарья и Айдар, работая вместе, могут изготовить 22 калькулятора за час, составьте уравнение их совместной работы и покажите, что его можно упростить до следующего вида:

$$22x^2-142x+60=0$$

d) Решите данное уравнение. Найдите количество калькуляторов, которые Дарья может собрать за 8-часовой рабочий день.

Задача 6. Бассейн соединен с двумя насосами A и B. x минут затрачивается на слив воды из бассейна, когда используется только насос A, но на 14 минут дольше, когда используется только насос B.

(a) Учитывая, что при совместной работе насосов затрачивается 24 минуты, составить уравнение, зависящее от x, и показать, что оно сводится к виду: $x^2-34x-336=0$.

(б) Решить уравнение $x^2-34x-336=0$. Следовательно, найти время, необходимое для слива воды из бассейна в день, когда насос A был поврежден.

Задача 7. Велосипедист ехал 20 км при средней скорости x км / ч.

a) Выразите количество затраченных часов через x.

b) Выразите через x количество часов, которое велосипедист затратил бы, если бы его средняя скорость увеличилась на 5 км / ч.

c) Учитывая, что велосипедист потратил бы на дорогу на 40 минут меньше положенного, если его средняя скорость возросла бы на 5 км / ч, покажите, что эта задача может быть представлена в виде уравнения $\frac{20}{x}-\frac{20}{x+5}=\frac{2}{3}$.

d) Найдите скорость велосипедиста.

Таким образом, использование при решении текстовых задач иллюстраций, схем, условных знаков способствуют более наглядному представлению об отношениях между частями задачи, связях между величинами, порядке этих связей. Это позволяет стимулировать у учащихся развитие наглядно-действенного мышления. При решении текстовых задач учащиеся приобретают дополнительные сведения, которые расширяют кругозор школьников, учат использовать математические знания в реальной жизни.

Список используемой литературы

1. Greg Byrd, Lynn Byrd and Chris Pearce. Cambridge Checkpoint Mathematics: Practice Book 9.
2. Шыныбеков А.Н. Алгебра. 9 класс. Учебник. Атамура 2013.