Мастер-класс
на тему:

«Оптимальные методы решения некоторых заданий ЕНТ»

Учитель средней общеобразовательной школы №34
инновационного типа г. Павлодара –

Кокорева Нина Викторовна

Цель мастер-класса: показать оптимальные методы решения некоторых заданий ЕНТ, традиционно вызывающих затруднения у учащихся.

Слушателей познакомили, как применяются уже известные формулы, так и познакомили с новой формулой, которую вывел ученик нашей школы Атанов Бауржан.

Задания разбирались с такой степенью подробности, которая достаточна для понимания решения, но вместе с тем оставлена степень свободы для самостоятельного решения подобных заданий.

«… И не прервать связующую нить…»

В. Егоров

I. Например, учащимся требуется решить следующий тест:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

A) $\frac{7}{x^2-3}$;

B) $\frac{7}{x+5}$;

C) $\frac{5}{x(x+5)}$;

D) $\frac{15}{x-7}$;

E) $\frac{x+5}{x-3}$.

Для того чтобы учащимся в дальнейшем успешно решали задания такого вида их предварительно знакомят с решениями, например такого задания:

Вычислить:

(1) $$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}+\ldots+\frac{1}{98*99}+\frac{1}{99*100}.$$

Решение:

$\frac{1}{1*2}=1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2*3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; …; $\frac{1}{98*99}=\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$; $\frac{1}{99*100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$.

Тогда выражение (1) можно записать иначе:

(2) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}=0{,}99.$$

Ответ: 0,99.

Затем даётся задание:

Вычислить:

$\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$.

Для его решения учащийся должен привести его к виду (1), т. е. записать иначе:

$\frac{1}{7*8}+\frac{1}{8*9}+\frac{1}{9*10}+\frac{1}{10*11}+\frac{1}{11*12}$,

а затем к виду (2):

$\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{1}{7}-\frac{1}{12}=\frac{12-7}{84}=\frac{5}{84}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{5}{84}}$**.**

Тогда возвращаясь к исходному тесту, получим:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)}$

Правильный ответ: C) $\frac{5}{x(x+5)}$.

Далее, предложить рассмотреть самим следующее задание:

$\frac{1}{2*5}+\frac{1}{5*8}+\frac{1}{8*11}+\frac{1}{11*14}+\frac{1}{14*17}=$

$=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{17})=\frac{5}{34}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{5}{34}}$**.**

Потом, предложить решить самостоятельно:

Упростить выражение:

$$\frac{1}{x(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+9)}+\frac{1}{(x+9)(x+12)}+\frac{1}{(x+12)(x+15)}.$$

Ответ: $\frac{5}{x(x+15)}$.

II. **Сократить дробь:**

$$\frac{x^{38}+x^{37}+\cdots+x+1}{x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1}.$$

A) $x^{23}+x^{12}+1$;

B) $x^{21}+x^{11}+1$;

C) $x^{23}+x^{13}+1$;

D) $x^{25}+x^{13}+1$;

E) $x^{25}+x^{12}+1$.

Прежде чем приступать, непосредственно к решению учащихся выводят формулу:

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$.

Затем применяют основное свойство дроби: $\frac{a}{b}=\frac{a*c}{b*c}$.

Итак, $\frac{x^{38}+x^{37}+\cdots+x+1}{x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1}=\frac{(x^{38}+x^{37}+\cdots+x+1)(x-1)}{(x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1)(x-1)}=\frac{x^{39}-1}{x^{13}-1}=$

$=\frac{(x^{13}-1)(x^{26}+x^{13}+1)}{(x^{13}-1)}=x^{26}+x^{13}+1.$

Ответ: C) $\mathbf{x^{26}+x^{13}+1}$.

Начинать пояснение лучше с задания:

Упростить: $\frac{a^{33}+1}{a^{11}-a^{22}+a^{33}}$.

III. Из тригонометрии:

Сначала предлагается решить следующие тесты:

Вычислить:

a) $16\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° \sin 90°$;

b) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}*\mathrm{tg}\frac{2\pi}{9}*\mathrm{tg}\frac{4\pi}{9}$.

Решения трудоемкие. А затем предлагается решить эти тесты по формулам:

$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha \sin(60° - \alpha) \sin(60° + \alpha)$;

$\mathrm{tg}3\alpha = tg\alpha\ tg(60° + \alpha)tg(60° - \alpha)$.

Это приводит к быстрому их решению.

Ответ: a)1; b)$\sqrt{3}$.

IV. Формула, которую вывел ученик Атанов Бауржан.

Данная формула применяется при нахождении площади фигуры, ограниченной графиком квадратичной и линейной функций, т. е. функцией вида: $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$;

$y=kx+b$.

Формула имеет вид:

$S_{\text{з.ф.}} = \frac{|a| * \Delta x^3}{6}$, где $\Delta x = x_2 - x_1$ - превращение аргумента.

Рассмотрим применение этой формулы на примере следующего теста:

1. Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = x + 6$.

A) 19,5;

B) 13,5;

C) $7\frac{1}{3}$;

D) $20\frac{5}{6}$;

E) 20,4.

Решение:

Найдем пределы интегрирования:

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

По теореме, обратной т. Виета, найдем $x_1 = -2$; $x_2 = 3$, тогда $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta x = 3 - (-2) = 5$.

Подставим в формулу вместо $|a| = 1$, $\Delta x = 5$, получим:

$S = \frac{1 * 5^3}{6}$; $S = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$.

Ответ: D) $20\frac{5}{6}$.

Для тренировки предлагаются следующие тесты:

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1) y=2x-x^2 и $\mathrm{y} = 0$.

A) $\frac{1}{3}$;

B) $\frac{7}{6}$;

C)- $\frac{1}{6}$;

D) $\frac{5}{6}$;

E) $\frac{1}{6}$.

Правильный ответ: E) $\frac{1}{6}$.

2) y=4x^2-1 и y=0

A) $\frac{2}{3}$;

B) $\frac{1}{3}$;

C) - $\frac{2}{3}$;

D) $\frac{1}{6}$;

E) - $\frac{1}{6}$.

Правильный ответ: A) $\frac{2}{3}$.

3) y=-x^2+4x и y=3-x

A) $\frac{1}{6}$;

B) $\frac{2}{3}$;

C) $\frac{1}{3}$;

D) $\frac{4}{3}$;

E) $\frac{5}{3}$.

Правильный ответ: A) $\frac{1}{6}$.

Данная формула существенно экономит время при решении тестов:

1) Не требуется вычислят интеграл;
2) Мало вычислений, что способствует избежать вычислительные ошибки.

V. Геометрия

1.

В геометрии были предложены задачи на применение формулы:

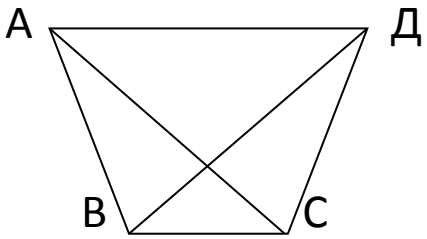
$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2,$$

где S – площадь трапеции, а S_1 и S_2 – площади треугольников, прилежащих к основаниям трапеции.

Например:

1. Трапеция разбивается диагоналями на 4 треугольника. Определить площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к основаниям трапеции равны 4 $см^2$ и 9 $см^2$.

Решение.



S_1 = S_{BOC}=4 $см^2$

S_2 = $S_{АОД}$=9 $см^2$

S_{ABCD} = $(\sqrt{4} + \sqrt{9})^2$ = $5^2 = 25(см^2)$

Ответ: 25 $см^2$.

Предлагается решить задачу, где применяется эта формула:

2. Диагонали трапеции КМРТ с основаниями МР и КТ пересекаются в точке С. Площадь треугольника МСР равна 4, КТ=2МР. Найти площадь трапеции.

Ответ: 36 $см^2$

3. Предлагается решить трудный тест:

В трапеции АВСД АД II ВС. Биссектрисы углов А, В, С и Д пересекаются в точке О. расстояние от точки О до прямой ВС равно 2,5 см; АВ=5 см, СД=7 см, тогда площадь трапеции равна?

А)30;
В)38;
С)60;
Д)40;
Е)35
Правильный ответ: А)30.

Трудность решения данной задачи заключается в том, что учащиеся забывают, что биссектриса угла - Г. М. Т. Знание этого факта приводит учащихся к правильному решению, что:

1. Данная в условии трапеция является прямоугольной;
2. Для нахождения площади трапеции требуется применить свойство описанного четырехугольника.

2.

Для решения некоторых тестов применяется формула Эйлера, которая позволит учащимся быстро найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

$$\boldsymbol{d^2 = R^2 - 2Rr}.$$

Например, тест:

Дан прямоугольный треугольник ABC, где катеты 3 см и 4 см, а гипотенуза 5 см. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

Решение:

R в прямоугольном треугольнике равен $\frac{c}{2}$, а r = $\frac{a+b-c}{2}$.
Тогда, R=5/2=2,5 см, а r=(3+4-5)/2=1.

d^2 = $2{,}5^2 - 2 * 2{,}5 * 1$

d^2 = 1,25

$d = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3.

Далее предлагается ряд задач на знание свойств медианы треугольника. Учащимся необходимо запомнить, что медиана делит треугольник на 2 равновеликих по площади, три медианы делят треугольник на 3 равновеликих, на 6 равновеликих. Медиана является центром тяжести треугольника.

1) Дан треугольник ABC. Со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. O-точка пересечения его медиан. Найти площадь треугольников AOB и BOC.

2) Дан треугольник ABC(угол C=90) , BC=5, AC=12. Найти расстояние от точки пересечения медиан до вершины C.

A)$\frac{13}{7}$

B)2

C)$\frac{13}{3}$

Д)$\frac{13}{8}$

E)2,5

3) В треугольнике ABC, CД медиана. Найти площадь треугольника BCД, если AC=20 см, BC=40 см, угол ACB=135

A)$100\sqrt{3}$

B)$200\sqrt{2}$

C) 100

Д)$100\sqrt{2}$

E)200

4)Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$см, а медиана боковой стороны равна 5 см. Найдите длину боковой стороны.

5)Две стороны треугольника равны 2 и 5 см соответственно. Медиана, проведенная к третьей стороне, равна 3 см. Найти площадь треугольника.

6)Медианы треугольника имеют длины 9 см, 12 см и 15 см. Найти площадь треугольника.

A)144;

B)60;

C)72;

Д)120;

E)84

7) Две стороны треугольника равны 3 см и 4 см, а медиана, проведенная к третьей стороне равна 2,5 см. найти площадь трапеции.

8) В прямоугольном треугольнике, медианы, проведенные к катетам равны $\sqrt{13}$ и $\sqrt{37}$. Найти гипотенузу треугольника.

A)$2\sqrt{10}$;

B)8;

C)$\sqrt{10}$;

Д)4;

E)$2\sqrt{12}$

9) Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16 см. Найти медиану проведенную к гипотенузе.

A)20;

B)16;

C)10;

Д)12;

E)14