

Пәні: Математика

Күні: 25.03.2013

Сабақ тақырыбы: Логарифм. Логарифмнің қасиеттері.

Сабақ мақсаты: оқытушылық: Логарифм анықтамасымен және оның қасиеттерімен таныстыру.

Дамытушылық: Студенттердің логикалық ойлауын, есте сақтау қабілетін, дұрыс шешім қабылдау қасиетін, математикалық білімін, меңгерген білімін пайдалану қабілетін, математикалық сауаттылығын дамыту. Логарифмнің қасиеттерін пайдаланып көрсеткіштік өрнектерді түрлендіру машығы мен икемділігін дамыту.

Тәрбиелік: патриоттық сезімдерін қалыптастыруға, өзін және өзгені сыйлауға, өзгенің еңбегін бағалай білуге, ұқыптылыққа, шыдамдылыққа, белсенділікке, жауапкершілікті болуға тәрбиелеу.

Сабақ түрі: Жаңа білім беру сабағы

Сабақты өткізу әдісі: түсіндіру

Сабақ көрнекілігі: слайд, флипчарт

Үлестірмелі материалдар: тірек конспектісі, тапсырмалар жазылған парақтар

Сабақ барысы:

I. Ұйымдастыру кезеңі. (1 мин)

1. Сәлемдесу.
2. Сабақ мақсатымен таныстыру

II. Өткен материал бойынша қайталау. (5 мин)

1. Теңдеулерді шешу
2. Логарифм ұғымын түсіндіру

III. Жаңа тақырыпты түсіндіру. (30 мин)

1. Логарифм анықтамасы.
2. Логарифм қасиеттері.
3. Көрсеткіштік өрнектерді логарифм арқылы өрнектеуге мысалдар келтіру.
4. Логарифмді дәреже арқылы өрнектеу.
5. Логарифм қасиеттерін пайдаланып түрлендірулер орындау.
6. Өрнектің мәнін есептеу.
7. Потенциалдауды орындау.

IV. Жаңа тақырыпты пысықтау. (8 мин)

V. Сабақты қорытындылау. (1 мин)

Тақырыбы: Логарифм. Логарифмнің қасиеттері.

Тақырыпты түсіндіруді келесі теңдеулерді шешу арқылы бастаймын:

$$3^x = 27; 3x + 2 = 0; 3^x + 9 = 0; x^5 = 5; x^2 - 4 = 0; 3^x = 6.$$

Жауаптары: **3; -2/3; шешімі жоқ; $\sqrt{5}$; ± 2 ; ?**

6-шы теңдеуді графикалық тәсілмен шешіп көрейік:

$$y = 3^x \text{ экспонента;}$$

$$y = 6 \text{ горизонталь түзу}$$

Теңдеудің түбірі бар деген бірінші тұжырымға келеміз. Бірақ ол түбірді қалай жазамыз? Түбірді жазудың жаңа формасы логарифмді енгізейік: **$x = \log_a b$** .
 $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ мұндағы **$a > 0, a \neq 1, b > 0$** .

Логарифм дегеніміз не?

Логарифмді көрнекі түрде анықтау үшін 2 санының дәрежелер кестесімен жұмыс жасайық

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2	4	8	16	32	64

Екінші жолдағы сандарды 2 санын дәрежеге шығару арқылы аламыз. Мысалы 16 санын алу үшін 2 санын 4 дәрежеге шығарамыз, ал 64 санын алу үшін 2 санын 6 дәрежеге шығарамыз.

Анықтама: b саны шығу үшін a негізі шығарылатын x дәреже көрсеткішін b санының a негізді логарифмі деп атаймыз.

Белгіленуі: $\log_a b = x$ -негізі a болатын b санының логарифмі x -ке тең деп оқылады.

Берілген негізі бойынша санның логарифмін табу операциясын логарифмдеу деп атаймыз. Басқаша айтқанда: берілген негіз бен дәреже бойынша көрсеткішті-логарифмді табу.

Кестені жалғастырып толтыратын болсақ келесі логарифмдерді аламыз:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2	4	8	16	32	64
$\log_2 2 = 1$	$\log_2 4 = 2$	$\log_2 8 = 3$	$\log_2 16 = 4$	$\log_2 32 = 5$	$\log_2 64 = 6$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$$

$$\log_2 8 = 3 \leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_2 16 = 4 \leftrightarrow 2^4 = 16$$

Логарифмдеуге тағы бірнеше мысалдар келтірейін:

Мысалы: 1.негізі 5-ке тең болатын 25 санының логарифмі 2-ге тең, себебі $5^2 = 25$ немесе $\log_5 25 = 2$

2.негізі 5-ке тең болатын $1/125$ санының логарифмі 3-ке тең, себебі $5^{-3} = \frac{1}{125}$ немесе

$$\log_5 \frac{1}{125} = -3$$

$$3. \log_2 \sqrt{2} = 0.5 \quad 2^{0.5} = \sqrt{2}$$

Барлық логарифмдерді есептеу мүмкін емес. Мысалы, $\log_2 5$ логарифмінің мәнін есептеп көрейік. Дәрежесі 5-ке тең сан жоқ, дегенмен кесте бойынша немесе калькулятормен есептесек $\log_2 5 = 2.32192809\dots$ санын алуға болады. Ойланып көрсек бұл сан $[2; 3]$ кесіндісінде орналасқан.

Тағы бірнеше мысал келтірсек:

$$\log_3 8 = 1.89278926\dots$$

$$\log_5 100 = 2.86135311\dots$$

Бұл сандарды иррационал деп аталады: яғни, үтірден кейін цифрларды қайталамай шексіз жаза беруге болады. Егер логарифм иррационал сан болса, онда оны логарифм түрінде қалдырамыз. Мысалы: $\log_2 5$, $\log_3 8$, $\log_5 100$

Негізгі логарифмдік теңбе-теңдік: $a^{\log_a b} = b$

Логарифмнің негізгі қасиеттері

1. Негізі a болатын 1 санының логарифмі нөлге тең, себебі кез келген санның нөл дәрежесі 1-ге тең.

$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

Мысалы: $\log_2 1 = 0 \Leftrightarrow 2^0 = 1$,

$$\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow 3^0 = 1$$

2. Негізі a болатын a санының логарифмі бірге тең, себебі кез келген санның бір дәрежесі сол санның өзіне тең.

$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

Мысалы: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$,

$$\log_7 7 = 1 \Leftrightarrow 7^1 = 7$$

3. Екі немесе бірнеше сандардың көбейтіндісінің логарифмі көбейткіштердің логарифмдерінің қосындысына тең.

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Мысалы: $\log_5 9 + \log_5 \frac{5}{9} = \log_5 9 * \frac{5}{9} = \log_5 5 = 1$

4. Қатынастың немесе бөлшектің логарифмі алымының логарифмі мен бөлімінің

логарифмінің айырымына тең.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Мысалы: $\log_7 196 - \log_7 4 = \log_7 \frac{196}{4} = \log_7 49 = 2$;

5. Дәреженің логарифмі дәреже көрсеткішін дәреже негізінің логарифміне көбейткенге тең.

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

Мысалы: $\log_5 25^4 = 4 \log_5 25 = 4 * 2 = 8$;

Логарифм негізінің дәрежесі логарифмге кері сан болып көбейтіледі.

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$$

Мысалы: $\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{5}{2} \log_2 2 = \frac{5}{2} * 1 = \frac{5}{2}$;

6. Басқа негізге көшу формуласы: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Әр түрлі негізді логарифмдерді өзара байланыстыру үшін басқа негізге көшу формуласын пайдаланамыз. Негіздері өзгергенде логарифмдер пропорционалды түрде өзгереді.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$\frac{1}{\log_b a}$ пропорционалдық коэффициентін – өту модулі деп атайды.

Басқа негізге көшу формуласынан шығатын салдар:

$$1. \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad 2. \log_{a^k} b = \frac{\log_a b}{k} \quad 3. \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

Мысалы: $\log_7 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \frac{3}{\log_2 7}$

Логарифмнің көмегі арқылы барлық дәрежені бірдей негізгі келтіруге болады.

Анықтама: Негізі 10 болатын санның логарифмі ондық логарифм деп аталады және lg деп белгіленеді.

Мысалы: $\log_{10} 81 = \lg 81$

Анықтама: Негізі e болатын санның логарифмі натурал логарифм деп аталады және ln белгіленеді.

Мысалы: $\log_e 13 = \ln 13$

Ондық логарифмнен натурал логарифмге өту модулінің мәндері мынаған тең:

$$\ln 10 = 2,303...$$

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,4343...$$

Анықтама: Логарифмдеудің нәтижесі бойынша осы нәтижені беретін өрнекті табу операциясы потенциалдау деп аталады.

$$\log_a A = 1 + 2\log_a b - 3\log_a c$$

$$\log_a A = \log_a a + \log_a b^2 - \log_a c^3$$

$$\log_a A = \log_a \frac{ab^2}{c^3}$$

$$A = \frac{ab^2}{c^3}$$

Бүгінгі жаңа білімді пысықтау мақсатында келесі мысалдарды қарастырайық:

I. Көрсеткіштік өрнекті логарифмдік өрнек арқылы жазу:

$$1) 25^2 = 625 \Rightarrow \log_{25} 625 = 2; \quad 2) (0,3)^{-2} = \frac{1}{0,09} \Rightarrow \log_{0,3} \frac{1}{0,09} = -2;$$

$$3) 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}; \quad 4) 5^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} = -\frac{3}{2}.$$

II. Логарифмді есептеу:

$$1) \log_{25} 625 = 2; \quad 2) \log_{0,3} \frac{1}{0,09} = -2;$$

$$3) \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}; \quad 4) \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} = -\frac{3}{2}.$$

III. Негізгі логарифмдік теңбе-теңдік арқылы түрлендіу:

$$1) 6^{\log_6 21} = 21; \quad 2) 3^{2\log_3 9} = 3^{\log_3 9^2} = 3^{\log_3 81} = 81;$$

$$3) 25^{\log_5 2} = 5^{2\log_5 2} = 5^{\log_5 2^2} = 5^{\log_5 4} = 4 \quad 4) \left(\frac{1}{36}\right)^{\log_6 2}$$

IV. Өрнектің мәнін есептеу:

$$1) \log_2 \log_{25} 625 = \log_2 2 = 1; \quad 2) \log_4 \log_{0,3} 0,09 = \log_4 2 = \frac{1}{2};$$

$$3) \log_2 \log_5 \sqrt{5} = \log_2 \frac{1}{2} = -1; \quad 4) \log_{\frac{1}{5}} \log_3 243 = \log_{\frac{1}{5}} 5 = -1.$$

$$1) \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{2} = \log_5 25 = 2; \quad 2) \log_4 12 + \log_4 4 = \log_4 16 = 2; \quad 3) \log_3 27 - \log_3 3 = \log \frac{1}{2} = -1;$$

$$4) \log_{\frac{1}{5}} 9 + 2\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{3} = \log_{\frac{1}{5}} 9 + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \log_{\frac{1}{5}} 9 * \frac{25}{9} = \log_{\frac{1}{5}} 25 = -2.$$

V. Потенциалдау арқылы x-ті табу:

$$\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$$

$$\log_6 x = \log_6 2^3 + \log_6 25^{0,5} - \log_6 3^2$$

$$\log_6 x = \log_6 8 + \log_6 5 - \log_6 9$$

$$\log_6 x = \log_6 \frac{8 * 5}{9}$$

$$\log_6 x = \log_6 \frac{40}{9}$$

$$x = \frac{40}{9}$$

Үйге тапсырма:

1. «Алгебра және анализ бастамалары», А.Н.Колмогоров, V. §11, №476-483

2. «Алгебра және анализ бастамалары», А.Әбілқасымова, III. §17, №229-255

Глоссарий

1	Логарифм	Логарифм	logarithm
2	Санның логарифмі	Логарифм числа	logarithm
3	Дәреже	Степень	degree
4	Көрсеткіш	Показатель	Index
5	Дәрежеге шығару	Возведение в степень	Involution
6	Логарифмдеу	Логарифмирование	Logarithm
7	Потенциалдау	Потенцирование	Potentialion

8	Логарифмдік өрнек	Логарифмическое выражение	Logarithmic expression
9	Көрсеткіштік өрнек	Показательное выражение	Index expression
10	Өрнектің мәнін есептеу	Вычислить значение выражения	Calculate the value of the expression
11	Қасиет	Свойство	Property
12	Логарифм қасиеттері	Свойства логарифма	Properties of logarithms
13	Негіз	Основание	Base
14	Теңбе-теңдік	Тождество	Identity
15	Ондық логарифм	Десятичный логарифм	Decimal
16	Натурал логарифм	Натуральный логарифм	

Сонымен бүгінгі сабақта математиканың жетінші амалы – берілген негіз бен дәреже бойынша дәреже көрсеткішін - логарифмді табу операциясымен таныстыңыздар. Логарифмді табу дәрежеге шығаруға кері амал. Негізгі логарифмнің тепе-теңдікті, логарифмнің қасиеттерін, есептеулерді жеңілдету үшін ондық және натурал логарифм қолданатынын білдіңіздер. Санның логарифмін табуды үйрендіңіздер.